ARC #050 解説

2016 年 4 月 2 日

A：大文字と小文字

次の 2 つの方法がある．

- 同じアルファベットの大文字と小文字は，文字コードの差がちょうど 32 である．例えば、'A' の文字コードは 65 であり，'a' の文字コードは 97 である．よって，C と c の文字コードの差がちょうど 32 か判定すればよい．
- いくつかのプログラミング言語には，英大文字と英小文字を互いに変換する機能がある．例えば，C を小文字へ変換し，c と一致するか判定すればよい．

B：花束

「x 本の赤い花と 1 本の青い花からなる花束」を赤い花束，「1 本の赤い花と y 本の青い花からなる花束」を青い花束と呼ぶことにする．

まず，「K 個の花束を作ることができるか？」という Yes / No 問題を考える．花束を作るためには，赤い花と青い花が少なくとも 1 本ずつ必要なので，とりあえず赤い花と青い花を K 本ずつ減らす．赤い花束を作るためには，さらに赤い花が $x-1$ 本必要なので，赤い花束は $\lfloor \frac{R-K}{x-1} \rfloor$ 個作ることができる．同様に，青い花束は $\lfloor \frac{B-K}{y-1} \rfloor$ 個作ることができる．よって，$\lfloor \frac{R-K}{x-1} \rfloor + \lfloor \frac{B-K}{y-1} \rfloor \geq K$ か判定すればよい．

あとは，上の条件を満たす最大の K を二分探索すればよい．

C：LCM 111

1 を N 個並べてできる整数を $one(N)$ と書くことにする．

$\mathrm{lcm}(x,y) = (x \cdot y) \,/\, \gcd(x,y)$ より，まずは $\gcd(one(A), one(B))$ を求める．$one(A) \,\%\, one(B) = one(A \,\%\, B)$ より，ユークリッドの互除法を用いると $\gcd(one(A), one(B)) = one(D)$ と分かる．ただし，$D = gcd(A,B)$ である．

以上より，$\mathrm{lcm}(x,y) = (one(A) \cdot one(B)) \,/\, one(D)$ である．ここで，$one(A)$ は

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = 10 \cdot a_k + 1$$

で定義される数列の第 A 項であり，行列累乗で計算できる．また，$one(B) \,/\, one(D)$ は

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = 10^D \cdot a_k + 1$$

で定義される数列の第 B/D 項であり，行列累乗で計算できる．これらの積が $\mathrm{lcm}(x, y)$ である．

D : Suffix Concat

一般に，文字列集合 $S_1, S_2, \ldots, S_N$ を好きな順番で連結して文字列を作るとき，$S_{p_1} S_{p_2} \ldots S_{p_N}$ が辞書順で最小であるための必要十分条件は，

$$\forall i, \quad S_{p_i} S_{p_{i+1}} \leq S_{p_{i+1}} S_{p_i}$$

である．よって，$S_i S_j < S_j S_i$ を比較関数として $(1, 2, \ldots, N)$ を昇順ソートすればよい．ただし，$S_i S_j$ と $S_j S_i$ の大小関係を高速に判定できる必要がある．

この問題では，文字列集合 $S_1, S_2, \ldots, S_N$ は文字列 S の suffix である．この性質を用いて $S_i S_j$ と $S_j S_i$ の大小関係を高速に判定することを考える．

あらかじめ，文字列 S の suffix array を計算しておく．suffix array 内の S_i の順位を $rank(i)$ と書くことにする．また，LCP 配列を計算しておき，任意の i と j について $\mathrm{lcp}(S_i, S_j)$ を高速に求められるようにしておく．

すると，$i < j$ について，$S_i S_j$ と $S_j S_i$ の大小関係は次のように判定できる．

- $\mathrm{lcp}(S_i, S_j) < N - (j - 1)$ の場合，
  - $S_i S_j$ と $S_j S_i$ の大小関係は $rank(i)$ と $rank(j)$ の大小関係に一致する．
- そうでない場合，
  - $\mathrm{lcp}(S_{N-(j-i-1)}, S_i) < j - i$ の場合，
    - $S_i S_j$ と $S_j S_i$ の大小関係は $rank(N - (j - i - 1))$ と $rank(i)$ の大小関係に一致する．
  - そうでない場合，
    - $S_i S_j$ と $S_j S_i$ は一致する．

計算量は $\mathrm{O}(N(\log N)^2)$ など．